Grado en Matemáticas – Análisis Funcional

1. Dada una sucesión acotada, $y\in\ell_\infty$, se define un operador lineal $T:\ell_p\to\ell_p$, donde $1\leqslant p\leqslant\infty$, por
$$[Tx](n)=y(n)x(n)\quad (x\in\ell_p, n\in\mathbb{N})$$
a) Estudia la continuidad de T y calcula su norma. ¿Hay algún valor de p para el que pueda asegurarse que T alcanza su norma?

   b) Prueba que T es un isomorfismo topológico si, y sólo si, existe un número $r>0$ tal que $|y(n)|\geqslant r$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

2. Sea $A=\{e_{2n-1}+e_{2n}:n\in\mathbb{N}\}\subset\ell_2$. Describe los espacios $M=A^\perp$ y $M^\perp$ y calcula las proyecciones ortogonales sobre los mismos.

3. Sea $C[0,1]$ el espacio vectorial de las funciones reales continuas en $[0,1]$ con la norma
$$\|x\|_1=\int_0^1|x(t)|\,\mathrm{d}t\ \ (x\in C[0,1])$$
Para cada $n\in\mathbb{N}$ sea $\varphi_n:C[0,1]\to\mathbb{R}$ el funcional lineal definido por
$$\varphi_n(x)=n\int_0^{\frac{1}{n}}x(t)\,\mathrm{d}t\quad (x\in C[0,1])$$
a) Prueba que φ_n es continuo y calcula su norma.

   b) Prueba que la sucesión $\{\varphi_n\}$ converge puntualmente al funcional lineal $\varphi:C[0,1]\to\mathbb{R}$ dado por $\varphi(x)=x(0)$ para toda $x\in C[0,1]$. Prueba que φ es discontinuo.

4. Explica si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas. Cuando sean ciertas, enuncia el resultado de teoría que lo justifica o proporciona una prueba, y cuando sean falsas indica un contraejemplo.

   a) Dos normas que tienen los mismos conjuntos acotados son equivalentes.

   b) Si X, Y son espacios normados y la dimensión de Y es finita, entonces todo operador lineal de X en Y cuyo núcleo sea cerrado es continuo.

   c) ¿Puede definirse alguna norma completa en el espacio vectorial de las funciones polinómicas?

   d) Sean $\|\,.\,\|$ y $|||\,.\,|||$ dos normas completas no equivalentes en un espacio vectorial X. Entonces la aplicación identidad $I_X:(X,\|\,.\,\|)\to(X,|||\,.\,|||)$ no es continua.

5. Lema de categoría de Baire. Teorema de Banach-Steinhaus.

Granada, 18 de noviembre de 2020